

Statistična analiza

3. 5. 2010

1. naloga

Pri merjenju raznih količin bi radi določili pravilno vrednost le-teh. Najboljši približek za pravi rezultat je povprečna vrednost meritev. Recimo, da smo naredili neko meritev n -krat in dobili rezultate x_1, x_2, \dots, x_n . Povprečno vrednost teh meritev izračunamo kot

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i .$$

Napako tako določene količine določimo na naslednji način. Razliko med izmerjeno vrednostjo x_i in njeno povprečno vrednostjo \bar{x} imenujemo absolutna napaka meritve i .

$$\Delta_i = x_i - \bar{x} .$$

Iz absolutnih napak posameznih meritev, lahko ocenimo absolutno napako meritve količine x

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i^2} .$$

Absolutna napaka ima enako enoto kot količina, ki jo merimo. Relativna napaka pa je kvocient med absolutno napako in povprečno vrednostjo

$$\delta = \frac{\Delta}{\bar{x}} .$$

Relativna napaka je brez enote. Rezultat sedaj pravilno z absolutno napako napišeno na naslednji način

$$x = \bar{x} \pm \Delta .$$

Z relativno napako rezultat pravilno zapišemo kot

$$x = \bar{x}(1 \pm \delta) .$$

Za rezultate v datoteki (visine.dat) izračunajte povprečno vrednost in standarden odmik ter rezultat zapišite z absolutno in relativno napako. Meritve tudi razdelite na razrede in podatke o razredih shranite v datoteko.

2. naloga

Večkrat moramo skozi izmerjene točke aproksimirati premico ($y=kx+n$). To naredimo z linearno regresijo. Denimo, da imamo n točk $T_i(x_i, y_i)$. Definirajmo naslednje količine

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2$$

s pomočjo teh količin izračunamo naklon in odsek po naslednjih enačbah

$$k = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

$$n = \bar{y} - k\bar{x}$$

Napako naklona in odseka pa določimo na naslednji način. Definirajmo naslednje količine

$$\hat{y}_i = kx_i + n$$

$$e = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2$$

$$s = \sqrt{\frac{e}{n-2}}$$

Napako naklona in odseka sedaj izračunamo kot

$$\Delta_k = \frac{s}{\sqrt{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}}$$

$$\Delta_n = s \sqrt{\frac{\bar{x}^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}}$$

Za rezultate v datoteki (prevodnost.dat) naredite regresijsko analizo. Zapišite naklon premice in odsek za napako.

Iskanje ničel funkcij

Bisekcija

je metoda za iskanje ničel zveznih funkcij ($f(x)=0$). Bisekcijo lahko uporabimo, če ima zvezna funkcija f v krajiščih intervala $[a, b]$ različen predznak, saj mora imeti v tem primeru na tem intervalu vsaj eno ničlo. Postopek je naslednji

- izračunamo razpolovišče intervala $c = (a+b) / 2$
- izračunamo vrednost funkcije v tej točki $f(c)$
- če sta vrednosti $f(a)$ in $f(c)$ različnega predznaka potem postopek nadaljujemo na intervalu $[a, c]$, drugače na intervalu $[c, b]$.

Metoda je uporabna za iskanje ničel lihe stopnje, pri ničlah sode stopnje pa ne deluje. Metoda ima dobro stran, ker vedno najde korene v primeru lihih ničel, ima pa počasno

konvergenco. Število korakov n , potrebnih za natančnost ničle ε , je $n = \log_2 \frac{|a-b|}{\varepsilon}$. Če je na intervalu več ničel, bo bisekcija našla eno izmed njih.

3. naloga

Na intervalu $[-10,5]$ najdi vsaj eno ničlo naslednjega polinoma z bisekcijo

$$p(x) = 7.853 - 99.889x + 68.699x^2 - 12x^3$$

4. naloga

Poiščite vsa presečišča krivulj $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ in $g(x) = x^2 - 1$ na intervalu $[0,6\pi]$. Vrednosti naj imajo natančnost 10^{-6} .

Tangenta metoda oziroma Newtonova metoda

Ta metoda ima kvadratično konvergenco. Deluje tako, da v trenutnem približku za ničlo x_i postavimo tangento na krivuljo in nov približek za ničlo je presečišče tangente z x osjo.

Tangenta je $y = f'(x_i)(x - x_i) + f(x_i)$, presečišče z osjo x ima pri $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$, ki je

nov boljši približek za ničlo funkcije $f(x)$ kot x_i . Če je začetni približek za ničlo kompleksno število, potem metoda poišče tudi kompleksne ničle.

5. naloga

S tangento metodo poišči eno realno in eno kompleksno ničlo polinoma

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + 1.5x^2 + 3x - 4.5$$

Numerično integriranje

Zelo pogost problem pri numerični matematiki je izračunati vrednost določenega integrala

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

kjer funkcijo $f(x)$ poznamo bodisi analitično z nepoznanim nedoločenim integralom bodisi je podana numerično.

Trapezna metoda

Funkcijo tu ekstrapoliramo kot premico skozi dve točki. Če je funkcija $f(x)$ podana pri vrednostih $x_i = a + ih$, kjer je korak definiran z $h = (b-a)/N$ in N število delov, na katerega razdelimo interval $[a,b]$, lahko integral po trapezni formuli zapišemo kot

$$I = \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{N-1} + y_N) + O(h^3).$$

$O(h^3)$ je napaka izračunanega integrala.

Simpsonova metoda

Je podobna metoda kot trapezna, le da tu funkcijo aproksimiramo s parabolo na treh zaporednih točkah. Moramo imeti sodo število intervalov, na katerega razdelimo večji interval, da lahko uporabimo naslednjo formulo za izračun integrala ($N=2m$)

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) + O(h^5).$$

6. naloga

S trapezni in Simpsonovo metodo izračunaj naslednji integral numerično za število delilnih točk $N=2, 10, 100, 5000$

$$\int_0^1 (e^{-x} + x - 1) dx.$$

Analitičen rezultat za ta integral je $\frac{1}{2} - \frac{1}{e}$. Primerjaj natančnost metod pri različnih številih delilnih točk.

7. naloga

Za podatke Δc_p kot funkcija temperature (datoteka dsc.dat) izračunaj spremembo entalpije procesa. Velja

$$\Delta H = \Delta H_0 + \int_{T_0}^T \Delta c_p dT.$$

Numerično odvajanje

Imejmo funkcijo podano v obliki tabele kot $f(x)=y(x_i)=y_i$. Radi bi določili odvod funkcije pri danem x . Najbolj naravna pot je iz definicije odvoda

$$\dot{f}_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h).$$

Natančnejše formule lahko dobimo z uporabo več točk pri računanju odvoda, tako imamo lahko

$$\dot{f}_{i-1} = \frac{(-3f_{i-1} + 4f_i - f_{i+1})}{2h} + O(h^2)$$

$$\dot{f}_i = \frac{(-f_{i-1} + f_{i+1})}{2h} + O(h^2).$$

$$\dot{f}_{i+1} = \frac{(3f_{i-1} - 4f_i + f_{i+1})}{2h} + O(h^2)$$

Za izračun drugega odvoda pa lahko uporabimo naslednjo formulo

$$\ddot{f}_i = \frac{(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})}{h^2} + O(h^2).$$

8. naloga

Za podatke pH kot funkcija dodane baze (datoteka fhma.txt) določite ekvivalentno točko titracije s pomočjo izračuna odvodov.

Diferencialne enačbe

Imejmo diferencialno enačbo tipa $\dot{y} = f(x, y)$. Najpreprostejšo rešitev dobimo z uporabo formule za odvod. Tej metodi je ime Eulerjeva in ima naslednjo obliko

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + O(h^2).$$

Bolj natančne metode dobimo z boljšo aproksimacijo za odvod. Ena izmed najpopularnejših metod je Runge-Kutta 4-tega reda. Ima naslednjo obliko

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = \frac{(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6} + O(h^5)$$

9. naloga

Izračunaj hitrostni profil padanja železne kroglice v vodi.

Imejmo sistem diferencialnih enačb tipa $\dot{\bar{y}} = \bar{f}(x, \bar{y})$ in začetni pogoj. Runge-Kutta 4-tega reda za ta sistem ima naslednjo obliko

$$\bar{k}_1 = hf(x_i, \bar{y}_i)$$

$$\bar{k}_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, \bar{y}_i + \frac{\bar{k}_1}{2})$$

$$\bar{k}_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, \bar{y}_i + \frac{\bar{k}_2}{2})$$

$$\bar{k}_4 = hf(x_i + h, \bar{y}_i + \bar{k}_3)$$

$$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + \frac{(\bar{k}_1 + 2\bar{k}_2 + 2\bar{k}_3 + \bar{k}_4)}{6} + O(h^5)$$

10. naloga

Izračunaj časovno odvisnost gibanja dušenega matematičnega nihala. Gibanje nihala opisuje naslednja diferencialna enačba

$$\ddot{y} + \beta\dot{y} + \sin y = a \sin \omega_0 t,$$

kjer je β koeficient dušenja, a in ω_0 pa amplituda in frekvenca vzbujanja. Problem reši za naslednje vrednosti parametrov (0,1 0,4 in 2 ter 0,1 0,4 in 0,1).