RAČUNANJE Z NAPAKAMI

Pri vajah ne moremo vseh količin izmeriti direktno, ampak jih moramo izračunati iz drugih izmerjenih količin. Tu je nekaj osnovnih pravil za računanje z napakami:

1) **Pri vsoti in razliki se absolutne napake seštevajo**

Imejmo količini a in b podani z napako

$$\begin{aligned} a &= \overline{a} \pm \Delta_a \\ b &= \overline{b} \pm \Delta_b \end{aligned},$$

vsoto in razliko izračunamo kot

$$\begin{aligned} a+b &= \left(\overline{a}+\overline{b}\right) \pm \left(\Delta_a + \Delta_b\right) \\ a-b &= \left(\overline{a}-\overline{b}\right) \pm \left(\Delta_a + \Delta_b\right) \end{aligned}.$$

Vidimo, da se pri vsoti in razliki vedno seštevajo absolutne napake.

2) **Pri množenju in deljenju se seštevajo relativne napake**

Imejmo količini a in b podani z napako

$$\begin{aligned} a &= \overline{a}\left(1 \pm \delta_a\right) \\ b &= \overline{b}\left(1 \pm \delta_b\right) \end{aligned},$$

zmnožek in kvocientu izračunamo kot

$$\begin{aligned} ab &= \left(\overline{a}\,\overline{b}\right)\left(1 \pm \left(\delta_a + \delta_b\right)\right) \\ \frac{a}{b} &= \left(\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right)\left(1 \pm \left(\delta_a + \delta_b\right)\right) \end{aligned}.$$

Vidimo, da se pri zmožku in kvocientu vedno seštevajo relativne napake.

3) **Pri potenciranju se relativna napaka množi s potenco**

Imejmo količino a podano z napako

$$a = \overline{a}\left(1 \pm \delta_a\right),$$

različne potence izračunamo kot

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(\overline{a}^2\right)\left(1 \pm \left(2\delta_a\right)\right) \\ \sqrt{a} &= \sqrt{\overline{a}}\left(1 \pm \left(\tfrac{1}{2}\delta_a\right)\right) \end{aligned}.$$

Vidimo, da se pri potenciranju relativna napaka vedno pomnoži s potenco.

4) Računanje s totalnim diferencialom

Recimo, da želimo izračunati količino G, ki je funkcija merjenih količin x, y in z:

$$G = G(x, y, z).$$

Totalni diferencial količine G je enak

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial z} dz$$

Vedno na zanima najslabša možnost, to je takrat, ko so vsi prispevki največji, to pomeni, da vedno upoštevamo pozitivne vrednosti parcialnih odvodov, namesto diferencialov merjenih količin pa vstavimo kar absolutne napake, ker so le te majhne

$$\Delta_G = \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| \Delta_x + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right| \Delta_y + \left|\frac{\partial G}{\partial z}\right| \Delta_z .$$

Večkrat je priporočljivo, da izračunamo logaritem količine predno naredimo totalni diferencial. Poglejmo si primer, kako pridemo do pravila za produkt.

$$G = ab$$

Logaritem količine G je

$$\ln G = \ln a + \ln b$$

pri tem smo že upoštevali, da je logaritem produkta enak vsoti logaritmov posameznih faktorjev. Če pri računanju totalnega diferenciala upoštevamo $d \ln G = dG / G$, dobimo za diferencial količine G naslednjo enačbo

$$\frac{dG}{G} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b} .$$

Diferenciale zopet zamenjamo z absolutnimi napakami, količine v imenovalcih pa s povprečnimi vrednostmi. Izraz $\Delta_G / \overline{G}$ na sedaj predstavlja relativno napako δ_G in dobimo enačbo za računanje napak pri produktu

$$\delta_G = \delta_a + \delta_b .$$

Primer

Za konec si poglejmo še kako računamo z napakami na naslednjem primeru, ko želimo izračunati gostoto krogljice. Imamo naslednje podatke za premer in maso:

d=(2,34±0,02) mm

m=(52±1) mg

Gostoto izračunamo na naslednji način

$$\rho = \frac{6m}{\pi d^3}$$

Napako lahko izračunamo s totalnim diferencialom ali z uporabo navodil na prvi strani. Dobimo naslednjo enačbo

$$\delta_\rho = \delta_m + 3\delta_d$$

pri tem vidimo, da seveda konstante ne prispevajo k napaki. Za gostoto dobimo $\rho = 7751 mgcm^{-3}$, za relativno napako pa $\delta_\rho = 0{,}0449$ ter za absolutno napako $\Delta_\rho = 349 mgcm^{-3}$. Sedaj moramo rezultat samo še pravilno zapisati z obema napakama.

$\rho = (7{,}7 \pm 0{,}3) gcm^{-3}$

$\rho = 7{,}7(1 \pm 0{,}04) gcm^{-3}$